УДК 517.55

ОБ ОДНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Отемуратов Б.П., Туренизова С.Б.
Каракалпакский государственный университет

Вопрос о нахождении различных семейств комплексных прямых, достаточных для голоморфного продолжения, был поставлен в [Stout, 1977, c.105-108; Globevnik, 1991, c.571-615]. Ясно, что семейство комплексных прямых, проходящих через одну точку, не является достаточным. Покажем, что семейство всех комплексных прямых, проходящих через конечное число точек, также не является достаточным. Таким образом, простых аналогов теоремы Гартогса ожидать не следует.

Пример. Пусть область D есть единичный шар в C^n :

$$D=\left\{z\in C^n\colon \sum_{j=1}^{n}\left|z_j\right|^2<1\right\}.$$

Рассмотрим пучок параллельных комплекных прямых вида

$$l_{c,b}=\left\{z\in C^n : z_1=t,\ z_j=c_j+b_jt,\ j=2,\dots,n,\ t\in C\right\} \tag{1}$$

где $b=(b_2,\dots,b_n)\in C^{n-1}$ - фиксированный вектор, а $c=(c_2,\dots,c_n)\in C^{n-1}$ - текущий вектор.

Тогда на сфере ∂D выполнено равенство

$$|t|^2+\sum_{j=2}^{n}\left|c_j+b_jt\right|^2=1,$$

поэтому

$$|t|^2+|t|^2\sum_{j=2}^{n}|b_j|^2+\sum_{j=2}^{n}|c_j|^2+t\sum_{j=2}^{n}b_j\overline{c_j}+\bar{t}\sum_{j=2}^{n}\overline{b_j}c_j=1\cdot$$

Отсюда на ∂D справедливо тождество

$$\bar{t}=\frac{1-\sum\limits_{j=2}^{n}|c_j|^2-t\sum\limits_{j=2}^{n}b_j\overline{c_j}}{t\left(1+\sum\limits_{j=2}^{n}|b_j|^2\right)+\sum\limits_{j=2}^{n}\overline{b_j}c_j}.$$

Рассмотрим на ∂D функцию $f=|z_1|^2P(z)$, где полином

$$P(z)=z_1\left(1+\sum_{j=2}^{n}|b_j|^2\right)+\sum_{j=2}^{n}\overline{b_j}\left(z_j-b_jz_1\right)=z_1+\sum_{j=2}^{n}\overline{b_j}\,z_j\,.$$

Тогда на семействе (1) (т.е. множествах $\partial D\cap l_{c,b},\ c\in C^{n-1}$) функция f равна

$$f=|t|^2\left(t\left(1+\sum_{j=2}^{n}|b_j|^2\right)+\sum_{j=2}^{n}\overline{b_j}c_j\right)=t\left(1-\sum_{j=2}^{n}|c_j|^2-t\sum_{j=2}^{n}b_j\,\overline{c_j}\right).$$

Поэтому она голоморфно продолжается вдоль данного семейства комплексных прямых с кривых $\partial D\cap l_{c,b}$ во множества $D\cap l_{c,b}$.

С другой стороны, f не является CR - функцией на ∂D, так как не удовлетворяет касательным уравнениям Коши-Римана. Напомним,

Определение [3]. Функция $f\in C(\partial D)$ является CR - функцией на ∂D, если

$$\int_{\partial D} f(\zeta)\,\bar{\partial}\alpha(\zeta)=0 \tag{2}$$

для всех внешних дифференциальных форм α типа $(n,\ n-2)$ с коэффициентами класса C^∞ в замыкании $\overline{D}$.

Условие (2) называется касательным условием Коши-Римана.

Если взять произвольное конечное множество точек $b^k=\left(b_2^k,\dots,b_n^k\right),\ k=1,\dots,m$ то в качестве функции f на ∂D можно взять функцию

$$f = |z_1|^2 \prod_{k=1}^{m} \left(z_1 \left(1 + \sum_{j=2}^{n} \left| b_j^k \right|^2 \right) + \sum_{j=2}^{n} \overline{b_j^k} \left(z_j - b_j^k z_1 \right) \right).$$

Функция f также не является CR - функцией на ∂D, но голоморфно продолжается во все пересечения $\partial D \cap l_{c,b^k}$, $c \in C^{n-1}$, $k = 1,\dots,m$.

Пучки прямых вида (1) определяют точку на бесконечной комплексной гиперплоскости $\Pi = CP^n / C^n$. Следовательно, простых аналогов теоремы Гартогса для данной задачи ожидать не приходится.

Чтобы получить пучки прямых, проходящие через конечные точки в C^n, необходимо плоскость Π дробно-линейным преобразованием перевезти в некоторую комплексную гиперплоскость L_0 в C^n. При этом D перейдет в некоторую ограниченную область D^*, функция f - в функцию f^*. Так как при дробно-линейном преобразовании комплексные прямые переходят в комплексные прямые, то мы получим нужный пример области, функции и конечного множества точек таких, что голоморфное продолжение функции f^* вдоль всех комплексных прямых, проходящих через данные точки, не влечет голоморфное продолжение f^* в D. Отметим, что эти точки будут лежать на некоторой комплексной гиперплоскости, не пересекающей замыкание области D^*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stout E.L. The boundary values of holomorphic functions of several complex variables // Duke Math. J. 1977- V.44 - №1 p. 105-108.
2. Globevnik J., Stout E.L. Boundary Morera theorems for holomorphic functions of several complex variables // Duke Math. J. 1991. – V.64. – №3, p. 571-615.
3. Мысливец С.Г. Теорема об аналитическом представлении CR– функций на гиперповерхностях с особенностями // Вестник КрасГУ физ.-мат. науки. 2002. – Вып.1. С.134-142.

Ссылка для цитирования:

Отемуратов Б.П., Турениязова С.Б ОБ ОДНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ// Berdaķ nomidagi Ķoraķalpoķ davlat universitetining Ahborotnomasi. 2011. Т.3-4 С 8-10